数理解析研究所講究録
第 1816 巻 2012 年 10-12

同変標準直線束のホイットニー和の自明性について

岡山大学大学院自然科学研究科　祁 艶 (QI, Yan)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1. 結果の紹介

この論文では, G を有限群とする. $\mathbb{C}^m$ を自明な G-作用を持つ m 次元複素ベクトル空間 (複素 G-加群) とし, $\mathbb{R}^n$ を自明な G-作用を持つ n 次元ユークリッド空間 (実 G-加群) とする.

(有限次元の) 実 G-加群 U に対して, $S(U)$ は U の G-不変な内積に関する単位球面を表す. 商空間 $S(U)/\{\pm 1\}$ を $P(U)$ で表す. すなわち, $P(U)$ は同変実射影空間である. $M=P(U)$ 上の標準直線束 γ_M の全空間 $E(\gamma_M)$ は次のように定義される.

$$E(\gamma_M)=\{(\{\pm x\},v)\mid x\in S(U), U\in\mathbb{R}\cdot x(\subset U)\}.$$

G-空間 M と実 (あるいは複素) G-加群 V に対して $\varepsilon_M(V)$ は M 上のファイバが V となる直積束を表す.

群作用を考えない実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の簡約 K-群について, 次の結果が知られている ([4, p. 252, 定理 6.17] を参照されたい).

$\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)\cong\mathbb{Z}_{2^h}$, ここで $h=\varphi(n,0)$, また $\varphi(n,m)=\sharp\{s|m<s\leq n, s\equiv 0,1,2,4 \pmod 8\}$ である. さらに, 群 $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)$ の生成元が $\xi=\gamma-1$ (γ は $\mathbb{R}P^n$ 上の標準直線束を表す) で与えられる. また関係式 $\xi^2=-2\xi$, $\xi^{h+1}=0$ が成り立つ.

同変実射影空間の標準直線束について, 以下の結果が得られている.

定理 ([3]). G を巡回群とし, V を原点以外で自由な G-作用をもつ偶数次元の実 G-加群とする. 更に γ_M を $M=P(\mathbb{R}\oplus V)$ 上の標準直線束とする.

(1) G の位数が偶数ならば, 任意の自然数 m と任意の実 G-加群 U, W に対して, $\gamma_M^{\oplus m}\oplus\varepsilon_M(U)$ は自明な実 G-ベクトル束ではない. 従って,

$$m[\gamma]\neq 0 \quad in\ \widetilde{KO}_G(M).$$

(2) G の位数が奇数で, $\dim V = 2$ ならば, $\gamma_M^{\oplus 4}$ は自明な実 G-ベクトル束である. 従って,

$$4[\gamma] = 0 \quad in \ \widetilde{KO}_G(M).$$

最近次の定理を得たので, 本稿においてその概説を行う.

主定理. G を奇数位数の有限群とする. 複素 G-加群 V は 1-次元の G-加群 $V(i)(i = 1, \ldots, n)$ の直和であるとする. また $V_{\mathbb{R}}$ で V の実化を表す. このとき, $M = P(\mathbb{R} \oplus V_{\mathbb{R}})$ の標準直線束 γ_M に対して, ${\gamma_M}^{\oplus 2^{n+1}}$ の複素化 ${\gamma_M}_{\mathbb{C}}^{\oplus 2^{n+1}}$ $(= {\gamma_M}^{\oplus 2^{n+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ は複素 G-ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{C}^{2^{n+1}})$ と同型である. 従って, ${\gamma_M}^{\oplus 2^{n+2}}$ は 実 G-ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^{2^{n+2}})$ と同型である.

2. 主定理の証明の概略

上の定理は n に関して帰納法で証明する. まず, $M_j = P(\mathbb{R} \oplus (V(1) \oplus \cdots \oplus V(j))_{\mathbb{R}})$ とおく. $n = 0$ の時, M_0 は一点となり, ${\gamma_{M_0}}_{\mathbb{C}}^{\oplus 2}$ は自明である. また, M_1 は円板とメビウスの帯を境界で貼り合わせることによって得られる. 同じように, M_{j+1} は二つの G-多様体 Y と Z を境界で貼り合わせることによって得られる. ここで,

$$Y = (S(\mathbb{R} \oplus (V(1) \oplus \cdots \oplus V(j))_{\mathbb{R}}) \times D(V(j+1)_{\mathbb{R}}))/\{\pm 1\},$$

$$Z = (D(\mathbb{R} \oplus (V(1) \oplus \cdots \oplus V(j))_{\mathbb{R}}) \times S(V(j+1)_{\mathbb{R}}))/\{\pm 1\}.$$

明らかに, Y, Z はそれぞれ M_j, $P(V(j+1)_{\mathbb{R}})$ と G-ホモトピックである. K を G-表現 $V(j+1)$ の核とおくと, G/K は奇数位数の巡回群であり, G/K は 2 次元実 G/K-加群 $(V(j+1))_{\mathbb{R}}$ に原点以外で自由に作用する. [3] の定理 2 の証明によって, $(\gamma_{M_{j+1}})|_Z^{\oplus 2} \cong_{G/K} \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2)$ が得られる. 従って,

$$(\gamma_{M_{j+1}})|_Z^{\oplus 2^{j+1}} \cong_{G/K} \varepsilon_Z(\mathbb{R}^{2^{j+1}}).$$

つまり

$$(\gamma_{M_{j+1}}^{\oplus 2^{j+1}})_{\mathbb{C}}|_Z \cong_G \varepsilon_Z(\mathbb{C}^{2^{j+1}}).$$

$(e_1, \ldots, e_{2^{j+1}})$ と $(f_1, \ldots, f_{2^{j+1}})$ をそれぞれ $({\gamma_{M_{j+1}}}_{\mathbb{C}}|_Y)^{\oplus 2^{j+1}}$ と $({\gamma_{M_{j+1}}}_{\mathbb{C}}|_Z)^{\oplus 2^{j+1}}$ 上の標準ユニタリーフレイミングとする. ユニタリー群 $\mathbf{U}(2^{j+1})$ 上の G-作用を自明とすると, Y と Z の共通部分から $\mathbf{U}(2^{j+1})$ への G-不変な行列関数 A が存在する. Y と Z の共通部分は Z の境界と等しい. Z から $\mathbf{U}(2^{j+1})$ への G-写像は Z/G から $\mathbf{U}(2^{j+1})$ への写像と一対一対応する. もし写像 $A' : \partial Z/G \to \mathbf{U}(2^{j+1})$ が Z/G に拡張すれば, $(\gamma_{M_{j+1}}^{\oplus 2^{j+1}})_{\mathbb{C}}$ は

自明であることがわかる. ここで, $A'([x]) = A(x)$ $(x \in \partial Z)$. Eilenberg の拡張定理 ([1, Chapter 4] に参照) によって, もし写像 A' の定める障害類

$$\sigma_{m+1}(A') \in H^{m+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_m(U(2^{j+1})))$$

が全ての $0 \leq m \leq \dim M_{j+1} - 1$ に対して, well-defined で更に零であれば, 写像 A' の Z/G 上への拡張が存在する.

まず, コホモロジー群 $H^{m+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_m(U(2^{j+1})))$ の係数に関して, 次の結果が知られている ([5, p. 207, p. 211] を参照されたい). $0 \leq i < 2^{j+2}$ ならば,

$$\pi_i(\mathbf{U}(2^{j+1})) = \pi_i(\mathbf{U}) \cong \begin{cases} 0 & (i \text{ は偶数}) \\ \mathbb{Z} & (i \text{ は奇数}) \end{cases}$$

ここで, $m + 1 \leq \dim M_{j+1} = 2(j+1)$ から, $m \leq 2j + 1 < 2^{j+2}$ がわかる. 更に, ファイバ束の Serre のスペクトル系列を利用すると,

$$H^{m+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{j+1}))) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (m+1 = 2j+2) \\ O & (m+1 \neq 2j+2). \end{cases}$$

が得られる. すなわち $0 \leq m \leq \dim M_{j+1} - 2$ に対して, $\sigma_{m+1}(A')$ は well-defined で自明である. $m = \dim M_{j+1} - 1$ のとき, $\sigma_{m+1}(A')$ は well-defined であるが, 自明ではないかもしれない. そこで, 写像

$$A'^2 : \partial Z_/G \to U(2^{(j+1)+1})$$

を次のように定義する.

$$A'^2([x]) = \begin{pmatrix} A'([x]) & 0 \\ O & A'([x]) \end{pmatrix} \quad ([x] \in \partial Z/G).$$

このとき, $0 \leq m \leq \dim M_{j+1} - 1$ に対して, $\sigma_{m+1}(A'^2) \in H^{m+1}(Z/G, \partial Z/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{(j+1)+1}))$ は well-defined で自明である. 従って, A'^2 は Z/G 上に拡張する. つまり

$$\gamma_{M_{j+1}\mathbb{C}}^{\oplus 2^{(j+1)+1}} \cong_G \varepsilon_{M_{j+1}}(\mathbb{C}^{2^{(j+1)+1}}).$$

References

[1] Sze-Tsen Hu, *Homotopy Theory*, Pure and Applied Mathematics VIII, Academic Press, New York and London, 1959.

[2] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies No.76, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.

[3] Y. Qi, The tangent bundles over equivariant real projective spaces, Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 54, 87-96, 2011.

[4] 戸田 宏, 三村 護, ホモトピー論, 紀伊國屋書店, 東京都新宿区, 1975.

[5] 戸田 宏, 三村 護, リー群の位相 (上), 紀伊國屋書店, 東京都新宿区, 1978.

E-mail address: `qiyan@math.okayama-u.ac.jp`